Musica... a suon di matematica

Se avete mai tentato di premere i tasti di un pianoforte, oppure se avete ascoltato con serietà un brano musicale, o ancora se siete tentati di battere il tempo col piede ascoltando qualsiasi suono ritenuto, siete predisposti a chiarire su base scientifica quali sono i lati più attraenti della musica. L'articolo che segue vi permetterà di colmare molte lacune.

di LUBI

I concetti logici sui quali la musica si basa sono stati elaborati lungo il corso di migliaia di anni, fino a un sistema di elevata organizzazione, che si basa sulla produzione e sull'ascolto di suoni in funzione di determinate esigenze, rispettando rigorosamente rapporti e armonia. Tuttavia, almeno fino ad oggi, non tutti comprendono perfettamente quali siano i concetti fondamentali sui quali la musica si appoggia.

Il fatto è che quasi tutta la musica che ci è possibile ascoltare, si tratti di musica wagneriana o di un «rock» indiavolato, è tutt'altro che perfetta.

Ciò non ha nulla a che fare con l'acustica ambientale, con la fedeltà delle apparecchiature di registrazione e di riproduzione, oppure con la scarsa musicalità di chi produce o ascolta i suoni.

A molti appassionati di musica può apparire strano il fatto che il pianista preferito, che sembra essere in grado di produrre suoni sublimi con un pianoforte di gran marca, in realtà produce delle «terze» e delle «seste» leggermente crescenti, mentre le «quinte» sono piuttosto calanti. Ciò non può essere assolutamente evitato. Infatti, un pianoforte viene accordato in modo da ottenere proprio questo risultato assurdo.

Una volta che questo concetto sia stato assodato, per quale motivo non si ricorre ad un esperto accordatore, e non si corregge questa situazione? Perché — così facendo — si costringerebbe il pianista ad usare uno strumento munito di oltre cinquecento tasti, anziché i normali ottantotto.

Per capire la base scientifica, e le inevitabili arbitrarietà della musica, vediamo di chiarire almeno i concetti matematici fondamentali che sono alla base della musica. Naturalmente — occorre premetterlo — questo concetto non deve spaventare il Lettore. Sebbene la matematica musicale possa assumere aspetti assai complessi, le nozioni fondamentali sono alla portata di chiunque abbia soltanto una conoscenza rudimentale della semplice aritmetica.

Anche una breve indagine svolta nel campo della matematica della musica può presentare il suo fascino: d'altro canto, nessuno potrà mai ammettere di non aver tratto una certa soddisfazione dallo scoprire che esistono relazioni matematiche ben definite — ad esempio — negli accordi armonici.

Inoltre, può risultare sorprendente apprendere che la dissonanza, sfruttata in modo razionale per ottenere effetti speciali, può rendere la musica più gradevole di quanto essa non risulterebbe se non se ne facesse uso, anche se la dissonanza può sembrare almeno concettualmente un fenomeno sgradevole.

Infine, può risultare persino sconcertante scoprire che il famoso «LA» da concerto che si trova sopra il DO centrale, vale a dire la nota tradizionale di riferimento per le accordature, non ha sempre avuto il valore di frequenza di 440 Hz attualmente adottato.

LA SCALA DIATONICA

Sebbene esista una base matematica distinta per ciascun tipo di musica, dobbiamo ammettere che non esiste nulla di simile al sistema cosiddetto della semplice scala «naturale».

Il sistema della scala musicale adottato nel mondo occidentale appare abbastanza logico; le scale usate invece in altre culture per produrre musica che appare strana ai nostri orecchi, sembra però altrettanto naturale a coloro che praticano appunto tali culture. In ogni caso, la musica si basa sempre su relazioni matematiche.

La nostra scala cosiddetta **diatonica** costituisce il risultato di una intensa sperimentazione che si è verificata attraverso le diverse e successive epoche musicali. Il termine «diatonico» è riferito ad una scala standard maggiore o minore, costituita da otto note, e quindi ad un'ottava.

Per fare un esempio pratico, una scala maggiore diatonica potrebbe essere rappresentata da otto tasti bianchi consecutivi della tastiera di un pianoforte. Se aggiungiamo a queste otto note i cinque semitoni intermedi (costituiti dai tasti neri), otteniamo in tal caso una scala **cromatica.**

Tutte queste tredici note che costituiscono un'ottava completa sono sufficienti per produrre musica di alta qualità? La risposta dipende da che cosa si intende per alta qualità!

Se il concetto è riferito ad un'armonia adeguatamente gradevole, che possa essere creata mediante strumenti fisicamente realizzabili, la risposta è affermativa. Se invece ci si riferisce ad una purezza tonale completa, la risposta è negativa.

E' possibile tuttavia concretare contemporaneamente entrambi i concetti, se si contempla l'impiego simultaneo di strumenti a percussione ed a valvola. Il motivo di ciò risulterà chiaro più avanti.

LA VERA SCALA

Per comprendere per quale motivo siamo costretti ad usare una scala che costituisce un compromesso piuttosto inesatto, è necessario partire dalle considerazioni relative ad una vera scala.

Come esempio adatto, prendiamo in considerazione la scala del DO maggiore, che ha inizio con il DO centrale del pianoforte:

DO, RE, MI, FA, SOL, LA SI, DO[1]

Queste note corrispondono alle sigle adottate in linea di massima nei paesi anglosassoni, disposti nella sequenza qui sotto riprodotta:

C, D, E, F, G, A, B, C[1]

Il LA che si trova al di sopra del DO centrale venne scelto molto tempo fa come nota fondamentale per l'accordatura degli strumenti musicali. Riferendoci alle frequenze di vibrazione della nota fondamentale LA, quest'ultima ha svolto diversi ruoli attraverso l'intera storia musicale.

La frequenza di ciascuna nota musicale venne determinata in un primo tempo da Padre Mersenne (nel 1648), un ecclesiastico francese che si interessava anche di matematica. Durante la sua epoca, il LA a frequenza più bassa della musica era di 373,7 Hz, mentre la frequenza del LA corrispondente per la musica da camera era di 402,9 Hz. Nel 1751, Haendel fece uso di un LA con la frequenza di 422,5 Hz

Nel 1834, un gruppo di fisici riunitisi a Stoccarda, in Germania, stabilì il valore standard di 440 Hz, ma venticinque anni più tardi in Francia venne legalizzato un LA orchestrale alla frequenza di 435 Hz.

NOTA	Chiave di DO (Hz)	Chiave di RE (Hz)
DO (C)	264	—
RE (D)	297	297
MI (E)	330	334*
FA (F)	352	371*
SOL (G)	396	396
LA (A)	440	445*
SI (B)	495	495
DO[1] (C[1])	528	557*
RE[1] (D[1])	—	594

Tabella 1 - *Ecco cosa accade quando un musicista decide di passare da una chiave ad un'altra, ad esempio dalla chiave di DO alla chiave di RE.*

Questa mancanza di uniformità creò naturalmente dei problemi. Ad esempio, gli strumenti costruiti in un Paese non risultavano accordati con quelli fabbricati in altri Paesi. Inoltre, un cantante abituato ad eseguire i brani in una determinata nazione poteva essere costretto a cantare in una chiave che non gli era solita, quando si esibiva con un'orchestra straniera.

Nel 1939 il problema fu alla fine risolto: durante una conferenza internazionale, tenutasi a Londra, venne assegnata al LA che si trova sopra il DO centrale la frequenza definitiva di 440 Hz.

Il termine inglese «pitch», che può definire sia la frequenza esatta, sia il timbro particolare di una nota, può essere interpretato in modo erroneo. In effetti, il cosiddetto «pitch» di una nota suonata o cantata viene riferito ad una frequenza vibratoria del tono fondamentale, anche se non rappresenta un sinonimo di quest'ultima.

Il «pitch», col quale termine si intende anche il **timbro** tipico di un suono, è una caratteristica soggettiva del suono stesso, che dipende non soltanto dalla frequenza di vibrazione, ma anche dall'intensità sonora.

Oltre a ciò, il «pitch» di un suono musicale è riferito ad un suono complesso costituito dalla frequenza fondamentale (come ad esempio quella di 440 Hz per il LA centrale), oltre alle diverse frequenze ad essa correlate, e che prendono il nome di **sovratoni** o di **armoniche**.

Per evitare confusioni, d'ora in avanti ci riferiremo esclusivamente alle frequenze fondamentali, evitando il concetto di «pitch», che è sostanzialmente riferito alla nota, tenendo però conto anche delle caratteristiche del timbro particolare.

Per affrontare con successo le difficoltà che una scala **vera** può imporre ad un musicista, consideriamo ciò che accade quando un esecutore orchestrale decide di passare da una chiave ad un'altra, ad esempio dalla chiave di DO a quella di RE. In riferimento alle frequenze di vibrazione, è necessario procedere alle variazioni precisate nella **Tabella 1.**

Si noti che le quattro note della scala di RE contrassegnate da un asterisco, presentano frequenze che differiscono da quelle delle note corrispondenti nella scala di DO.

Per passare dalla chiave di DO alla chiave di RE, un musicista dovrebbe poter usare uno strumento che contemplasse l'aggiunta di diverse note. Ciò comunque non è tutto.

Altre numerose note risulterebbero necessarie per consentire il passaggio ad altre chiavi ancora. Per complicare le cose, sarebbe necessario disporre di altre note supplementari per le diverse scale minori. Di conseguenza, risulterebbero necessarie almeno settantadue note per ciascuna ottava di uno strumento, per coprire la gamma completa.

Dal momento che il pianoforte dispone normalmente di sette ottave, sarebbero quindi necessari più di cinquecento tasti, il che è ovviamente irrealizzabile.

Gli strumenti del tipo a percussione, come il pianoforte, e quelli invece a «valvola», come gli strumenti a fiato, ne sarebbero mostruosamente trasformati. Per contro gli strumenti a corda, come il violino, nonché la voce umana potrebbero — almeno in teoria — fornire adeguatamente tutte le note necessarie per completare una scala vera.

I CALCOLI DELLE FREQUENZE

Il calcolo della frequenza tonale per qualsiasi scala diatonica costituisce un problema relativamente semplice: ad esempio, la chiave della scala di RE di cui sopra è stata sviluppata in base alla tonica RE (si rammenti che col termine di «tonica» si intende la prima nota, vale a dire la più bassa, di qualsiasi scala) moltiplicandone il valore fondamentale di frequenza (RE = 297 Hz) per i rapporti appropriati per la terza musicale, la quarta, la quinta, ecc. Questi valori sono chiaramente elencati nella **Tabella 2.**

Ad esempio, il rapporto di frequenza di una quinta musicale (vale a dire l'intervallo tra la prima e la quinta nota della scala) corrisponde a 3 : 2. Nella chiave della scala di RE, la nota LA rappresenta appunto una quinta.

Di conseguenza, stabilendo la proporzione:

$$3 : 2 = X : 297$$

e risolvendo l'espressione rispetto ad X, otteniamo approssimativamente il valore di 445 Hz per la frequenza del LA nella chiave della scala di RE.

Gli altri valori possono essere determinati in modo analogo: ovviamente, la nota dell'ottava successiva, RE[1], presenta la frequenza esattamente doppia di quella della tonica RE.

GLI INTERVALLI MUSICALI

Gli intervalli musicali possono essere di due tipi diversi: in primo luogo, citeremo quelli tra diverse note di una scala e la nota tonica (il DO basso). Questi intervalli vengono definiti con i termini di **terze, quarte, quinte,** ecc. In secondo luogo, esistono gli intervalli tonali rappresentati dalle note adiacenti facenti parte di una scala.

Nella Tabella 2 si può notare che esiste un intervallo di ottava con un rapporto tra le frequenze di 2 : 1, oltre alla presenza di due seste maggiori (rapporto 5 : 3), una sesta minore (rapporto 8 : 5), tre quinte (rapporto 3 : 2), quattro quarte (rapporto 4 : 3), tre terze maggiori (rapporto 5 : 4), e due terze minori (rapporto 6 : 5).

Le differenze tra le categorie maggiore e minore sono piuttosto arbitrarie, ma ciò nonostante sono molto importanti per comprendere la matematica sulla quale si basa la musica.

Ad esempio, se la frequenza della nota MI viene divisa per la frequenza del DO (una «terza»), il semplice rapporto che ne deriva è di 5 : 4. La medesima cosa sussiste per la terza tra il FA e il LA, e per la terza tra il SOL ed il SI.

D'altro canto, le terze tra il SOL e il MI e tra il DO^1 ed il LA comportano un rapporto numericamente più piccolo, e quindi «minore», pari a 6 : 5. La relazione dimensionale risulta più chiara se le frazioni vengono trasformate in forma decimale: in altre parole

$$5 : 4 = 1{,}25$$

mentre

$$6 : 5 = 1{,}20$$

La medesima spiegazione vale nei confronti della differenza che si riscontra fra la sesta maggiore e la sesta minore.

Non abbiamo però trascurato qualcosa? Cosa possiamo stabilire nei confronti della terza tra il RE e il FA? Si tratta di una terza maggiore o di una terza minore? Ebbene, nessuna delle due risposte è esatta, in quanto il rapporto di frequenza tra i valori di 352 e 297 non può essere ulteriormente semplificato. Inoltre, questo intervallo tonale non è significativo dal punto di vista musicale, e ciò seguendo la legge di Pitagora, secondo la quale le relazioni tonali devono essere riducibili ad un semplice rapporto tra numeri interi.

La **Tabella 3** chiarisce come si calcolano questi diversi intervalli. Nella terza riga, la frequenza di ogni nota è divisa per la frequenza della tonica (264). La riga successiva stabilisce i rapporti semplificati, così come sono stati riportati nella Tabella 2.

Alcuni matematici musicisti che non amano le frazioni eliminano queste ultime moltiplicando i valori per un fattore comune, in questo caso 24. Ciò porta alla determinazione delle frequenze relative che costituiscono la quarta riga della tabella. Cosa significano queste cifre? Semplicemente ciò: nel periodo di tempo in cui la tonica DO vibra 24 volte, il RE vibra 27 volte, il MI 30 volte, e così via.

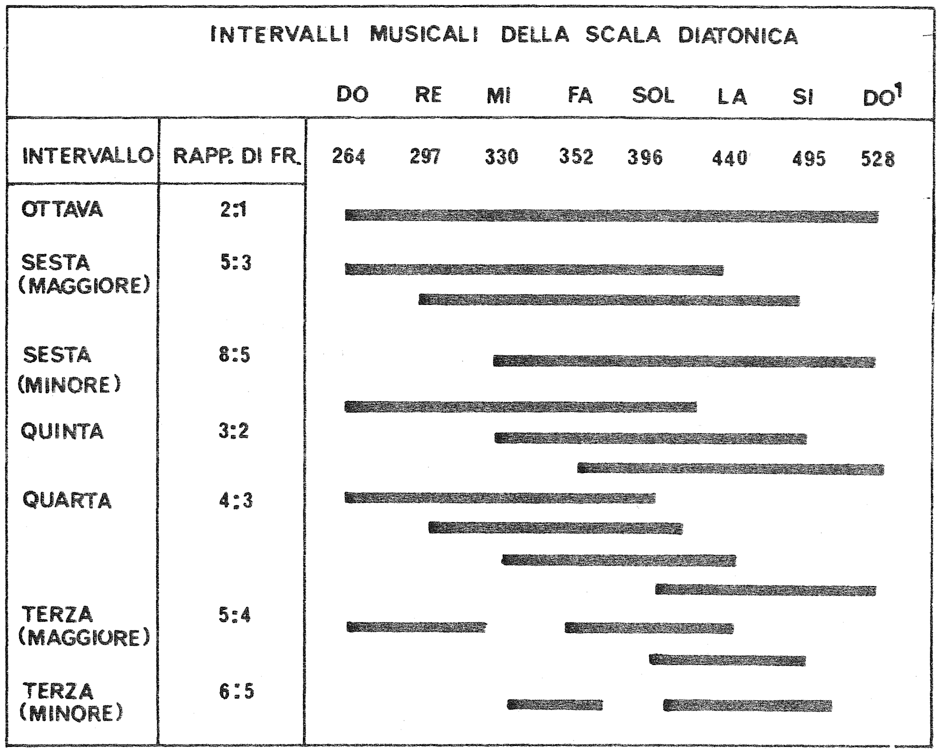

Tabella 2 - *Intervalli musicali e relativo rapporto di frequenza per la scala diatonica. Dal momento che sono costanti, i rapporti di intervallo possono essere sfruttati per stabilire le frequenze relative ad una scala in chiave diversa.*

RAPPORTI DI FREQUENZA DELLA SCALA REALE (CHIAVE DI DO MAGGIORE)									
NOTA	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO^1	RE^1
FREQUENZA (HZ)	264	297	330	352	396	440	495	528	594
RAPPORTO RISPETTO AL DO TONICO	264/264	297/264	330/264	352/264	396/264	440/264	495/264	528/264	594/264
RAPPORTO SEMPLIFICATO	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1	9/4
FREQUENZA RELATIVA (RAPPORTO × 24 PER ELIMINARE LE FRAZIONI)	24	27	30	32	36	40	45	48	54
INTERVALLI DI TONO MAGGIORE		9/8			9/8		9/8		9/8
INTERVALLI DI TONO MAGGIORE			10/9			10/9			
INTERVALLI DI SEMITONO				16/15				16/15	

Tabella 3 - *Rapporti di frequenza tra le note che costituiscono una scala diatonica. Nella quinta riga a partire dall'alto sono riprodotti i valori semplificati della quarta riga, privati dei valori frazionari, in modo da mettere in evidenza le frequenze relative.*

SCALE REALI MAGGIORI E MINORI (CHIAVE DI DO)								
NOTE (MAGGIORE)	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO[1]
NOTA (MINORE)	DO	RE	MI_b	FA	SOL	LA_b	SI_b	DO[1]
FREQUENZA (MAGGIORE)	264	297	330	352	396	440	495	528
FREQUENZA (MINORE)	264	297	316,8	352	396	422,4	475,4	528
INTERVALLI (MAGGIORI)		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
INTERVALLI (MINORI)		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$

Tabella 4 - *Frequenze ed intervalli di tono per le scale maggiore e minore in chiave di DO: la cosa più interessante consiste nel fatto che i medesimi intervalli si verificano in entrambe le scale, sebbene in ordine differente.*

Dividendo poi le frequenze relative delle note adiacenti, è possibile ottenere i rapporti di intervallo per i toni adiacenti, che costituiscono le ultime tre righe della Tabella 3.

Si noti che esistono tre intervalli maggiori con rapporto 9 : 8 (quattro se la scala viene estesa di una nota), due intervalli minori con rapporto 10 : 9, e due intervalli di semitono, con rapporto 16 : 15.

In queste circostanze i termini «maggiore» vengono usati semplicemente per indicare il valore numerico relativo dei rapporti, nel senso che — ad esempio — 9 : 8 rappresenta un numero maggiore di 10 : 9.

La **Tabella 4** illustra gli intervalli di tono nelle scale maggiori e minori. La scala minore presenta tre note calanti con frequenze leggermente più basse di quelle delle note corrispondenti nella scala maggiore. Le ultime due righe di questa tabella rivelano che i medesimi intervalli si manifestano sia nelle scale maggiori, sia in quelle minori, ma con ordine differente. Entrambe le scale soddisfano perciò completamente la legge di Pitagora, aderendo all'esigenza che impone rapporti numerici semplici tra le note adiacenti.

Ed ora un appuntamento di natura eminentemente matematica: quando si ha a che fare con numeri che presentano frazioni decimali, in primo luogo è opportuno moltiplicare sia il denominatore che il numeratore per un fattore comune (solitamente 10), proprio per eliminare le parti decimali, per poi ridurre il tutto ad una semplice frazione. Ad esempio, per calcolare con esattezza l'intervallo che sussiste tra il SOL ed il LA, si può procedere come segue:

$$\frac{422{,}4}{396} = \frac{4.224}{3.960} = \frac{16}{15}$$

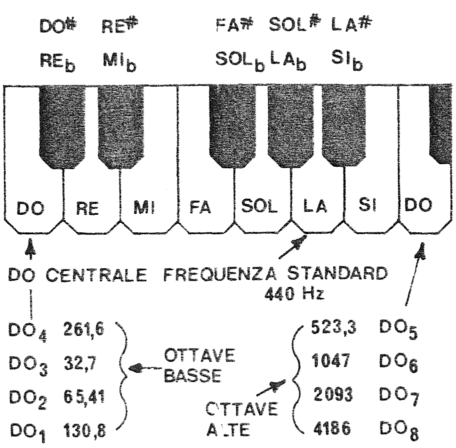

Fig. 1 - La scala a temperamento costante, attualmente in uso comune, non ammette alcuna differenza tra i diesis ed i bemolle, per cui il RE≠ed il MIb risultano identici tra loro.

FREQUENZE DELLA SCALA		
Nota	Scala reale (Hz)	Scala a temperamento uguale (Hz)
DO	264	261,7
RE	297	293,7
MI	330	329,7
FA	352	349,2
SOL	396	392
LA	440	440
SI	495	493,9
DO[1]	528	523,3

Tabella 5 - *Confronto tra le frequenze di una scala reale con quelle della scala a temperamento costante. L'unica nota che presenta la medesima frequenza in entrambe è il LA.*

LE SCALE TEMPERATE

Per evitare l'impiego di un numero sproporzionatamente alto di note per ciascuna ottava, il che avrebbe reso enormemente complicati gli strumenti musicali, i musicisti hanno tentato attraverso i secoli di stabilire delle scale speciali, denominate appunto scale temperate, in grado di costituire un compromesso con le esigenze reali.

Le più importanti tra queste sono la scala pitagorica, la scala temperata a tono medio, e quella ormai universalmente accettata, stabilita circa duecentocinquanta anni fa.

Nella suddetta scala, detta a temperamento uguale, ciascuna ottava viene suddivisa in dodici intervalli uguali tra loro, definiti col termine di **semitoni.** Due semitoni quindi corrispondono ad un tono completo.

Una conseguenza importante di questo tipo di scala consiste nel fatto che i **bemolle** ed i **diesis** perdono il loro significato originale come toni individuali. Ad esempio, il SOL≠ e il LAb risultano in tal caso identici tra loro. In effetti, alla scala diatonica originale, rappresentata in un pianoforte dai tasti bianchi, sono state aggiunte per ciascuna ottava cinque note nuove (i tasti neri). Questa disposizione viene sintetizzata nel disegno di **figura 1.**

E' ovvio che, quando queste tredici note di un'ottava devono svolgere il compito di settantadue note in un sistema musicale complesso, deve necessariamente essere compiuto un sacrificio agli effetti della qualità tonale. Uno strumento accordato secondo la scala a temperamento uguale presenta un solo intervallo corretto, e precisamente l'ottava. Tutti gli altri intervalli sono — in un certo grado — in errore; le terze e le seste sono infatti leggermente crescenti, mentre le quinte sono leggermente calanti.

Si noti che il DO centrale presenta ora una frequenza di 261,7 Hz, anziché la frequenza di 264 Hz di cui ci siamo già più volte occupati riferendoci alla scala reale. Questa correzione è necessaria per fare in modo che il LA campione presenti appunto la frequenza di 440 Hz.

La **Tabella 5** confronta le frequenze della scala vera con quelle della scala convenzionale di cui ci siamo occupati: si noti che il LA è l'unica nota che ha la medesima frequenza in entrambe le scale. La frequenza del DO[1] è pari al doppio di quella del DO dell'ottava inferiore.

Quando i cinque semitoni vengono aggiunti a questa scala diatonica, la gamma delle frequenze comprese tra il DO ed il DO^1 deve essere divisa in dodici parti uguali. Matematicamente parlando, ciascun dodicesimo corrisponde alla dodicesima radice di 2, in quanto la frequenza del DO deve essere moltiplicata per 2 per ottenere il valore di frequenza del DO^1.

Di conseguenza, avremo che:

$$n = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946$$

La **Tabella 6** chiarisce in quale modo funzionino i rapporti di frequenza per ciascuna nota: si ottengono questi rapporti moltiplicando ogni rapporto successivo per il fattore comune precedentemente calcolato, pari a 1,05946, per ottenere il rapporto successivo. Ad esempio, per ottenere il rapporto relativo al FA, occorre moltiplicare il rapporto precedentemente calcolato per il MI (1,2598) per il valore costante 1,05946. I rapporti derivati possono quindi essere sfruttati per calcolare le frequenze effettive delle note.

Facciamo ancora un esempio pratico: moltiplicando il valore di 261,7 (DO tonico) per 1,6818 (il rapporto corrispondente al LA), si ottiene la frequenza di 439,958 per il LA, con un valore quindi molto prossimo allo standard di 440 Hz.

E' importante rammentare che, quando si tratta di aggiungere gli intervalli, i rispettivi rapporti devono essere invece moltiplicati. Ad esempio, per aggiungere la quarta DO-FA alla quinta DO-SOL, si deve moltiplicare 1,3347 x 1,4982 per ottenere il valore di 1,9996, il che corrisponde approssimativamente a 2, ossia al rapporto esatto dell'intervallo di ottava.

Per evitare operazioni matematiche complesse, si ricorre a volte all'impiego di altri sistemi più empirici per indicare gli intervalli di frequenza. Il sistema del centesimo (dall'inglese «cent») è riferito ad una scala numerica nella quale la frequenza tonica corrisponde a 0, l'ottava tonica corrisponde ad 1.200, e ogni intervallo semitonale equivale a 100 centesimi.

A differenza dei rapporti decimali di frequenza, questi valori possono essere sommati. Ad esempio, la quarta DO-FA viene rappresentata da 500 centesimi, mentre la quinta DO-SOL è rappresentata da 700 centesimi. La somma di questi due numeri corrisponde appunto a 1.200, e ciò indica che la somma tra una quarta ed una quinta corrisponde ad un'ottava.

RAPPORTI DI FREQUENZA DELLA SCALA A TEMPERAMENTO COSTANTE

Nota	Rapporto di frequenza	Centesimi dalla tonica
DO	1,0000	0
DO♯ (RE^6)	1,05946	100
RE	1,1224	200
RE♯ (MI^6)	1,1891	300
MI	1,2598	400
FA	1,3347	500
FA♯ (SOL^6)	1,4141	600
SOL	1,4982	700
SOL♯ (LA^6)	1,5873	800
LA	1,6817	900
LA♯ (SI^6)	1,7817	1000
SI	1,8876	1100
DO^1	2,0000	1200

Tabella 6 - *Rapporti di frequenza nella scala a temperamento costante: dal momento che la scala comprende dodici parti uguali, il fattore comune è pari a 1,05946.*

Un altro sistema numerico abbastanza analogo fa invece uso di unità denominate «savart».

Il lettore dispone ora di informazioni sufficienti per calcolare con una certa facilità la frequenza di qualsiasi nota, appartenente a qualsiasi ottava della scala a temperamento costante. A questo riguardo, la figura 1 riporta le frequenze di tutti i DO presenti nella tastiera di un pianoforte. Per ottenere quindi la frequenza di qualsiasi altra nota si possono impiegare i rapporti di frequenza elencati nella Tabella 6.

Supponiamo infatti che si voglia conoscere la frequenza della nota MI^3, che corrisponde al MI dell'ottava sotto il DO centrale. Per stabilire questo valore, innanzitutto occorre determinare la frequenza del MI^4 (ossia del MI sopra il DO centrale). moltiplicando il valore di 261,6 per il rapporto corrispondente al MI, pari ad 1,2598.

La risposta è quindi 329,56.

Per scendere ora di un'ottava, basta dividere quel numero per 2, in modo da ottenere il valore di 164,78 Hz, che corrisponde alla frequenza del DO^3.

Dimezzando ancora questo numero si ottiene la frequenza del MI^2 dell'ottava inferiore successiva. Ovviamente, per trovare poi il valore di MI in un'ottava più alta, bisogna moltiplicare per 2, anziché dividere per tale numero.

LE TRIADI ARMONICHE

Esistono determinate combinazioni di tre note che sono naturalmente gradevoli (armoniose), i cui accordi possono essere derivati con l'aggiunta di una quarta nota. (Questa nota, sia detto incidentalmente, deve corrispondere all'ottava di una delle tre note contenute nella triade).

Per illustrare come le suddette triadi possano essere scoperte mediante l'analisi matematica, è preferibile compiere il ragionamento nei confronti della scala vera, in quanto le relazioni matematiche risultano in questo caso più semplici e più esatte.

La **Tabella 7** elenca il metodo di derivazione delle triadi armoniche nella chiave di DO maggiore. Innanzitutto occorre allestire la scala diatonica, estenderla di una nota (RE^1), e calcolare la frequenza vibratoria di ciascuna nota. Ciò fatto, è possibile semplificare queste relazioni di frequenza dividendone tutti i valori per 11, allo scopo di ottenere le frequenze relative

TRIADI ARMONICHE MAGGIORI (CHIAVE IN DO)

NOTE	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO^1	RE^1	
FREQUENZA(HZ)	264	297	330	352	396	440	495	528	594	
FREQ ÷ 11	24	27	30	32	36	40	45	48	54	
÷ 6	4		5		6					DO MI SOL
÷ 8	6			4		5		6		FA LA DO^1
÷ 9		3			4		5		6	SOL SI RE^1

Tabella 7 - *Derivazione di una triade armonica maggiore per la scala diatonica del DO maggiore. Dividendo le frequenze per 6 per 8 e per 9, si ottengono tre triadi che presentano il medesimo rapporto di frequenza, pari a 4 : 5 : 6.*

TRIADI ARMONICHE MINORI (CHIAVE DI DO)										
NOTA	DO	RE	MI$_b$	FA	SOL	LA$_b$	SI$_b$	DO^1	RE^1	
FREQUENZA (Hz)	264	297	316,8	352	396	422,4	475,4	528	594	
× 10	2640	2970	3168	3520	3960	4224	4754	5280	5940	
÷ 22	120	135	144	160	180	192	216	240	270	
÷ 12	10		12		15					DO MI SOL
÷ 16				10		12		15		FA LA DO^1
÷ 18					10		12		15	SOL SI RE

Tabella 8 - *Derivazione di triadi armoniche minori per la scala diatonica in chiave di DO minore. Sebbene i rapporti di frequenza differiscano rispetto a quelli visibili nella Tabella 7, le triadi sono costituite dalle stesse note.*

che costituiscono la terza riga (DO = 24, RE = 27, e così via).

E' così possibile scoprire che certi numeri sono divisibili per 6, in modo da ottenere numeri interi ancora più piccoli; essi corrispondono alle note DO, MI e SOL, che presentano rapporti di frequenza di 4 : 5 : 6. Dividendo per 8 e quindi per 9 si ottengono altre due triadi con rapporto di 4 : 5 : 6, e precisamente i gruppi di note FA-LA-DO^1 e SOL-SI-RE^1.

Si noti ciò che accade svolgendo i medesimi calcoli, ma usando le frequenze corrispondenti nella scala a temperamento uguale (DO = 261,7, MI = 329,7, SOL = 392). In questo caso, il rapporto DO-MI-SOL assume i valori numerici di 4,1 : 5,1 : 6,1, e risulta quindi abbastanza prossimo a quello ottenuto svolgendo il calcolo nei confronti della scala vera.

Anche in questo caso — tuttavia — non è possibile ottenere le relazioni costituite da numeri interi di valore basso che sono la caratteristica intrinseca della consonanza più elevata, ossia dell'armonia.

La **Tabella 8** rappresenta una derivazione analoga riferita alle tre triadi nella scala di DO minore. Il procedimento matematico è stato leggermente modificato allo scopo di tener conto dei valori decimali con maggior facilità.

In primo luogo, le frequenze vengono tutte moltiplicate per 10, per eliminare i valori frazionari, dopo di che si realizza la semplificazione fondamentale dividendo per 22. Quando, successivamente, le frequenze relative nei loro valori semplificati vengono divise per 12, 16 e 18, è possibile scoprire tre gruppi di triadi minori, aventi tra loro i rapporti di frequenza di 10 : 12 : 15.

Si osservi che — sebbene i rapporti di frequenza differiscano da quelli ottenuti con le triadi maggiori — sono ancora le medesime note che costituiscono le triadi stesse.

A questo punto è utile fare un commento che può sembrare sconcertante per il Lettore: non esiste infatti alcun mistero nei confronti dei divisori primari usati in ciascun caso (11 per le triadi maggiori, e 22 per le triadi minori). L'attenta osservazione dei valori di frequenza ci ha permesso di stabilire che questi divisori non costituivano altro che un mezzo conveniente per ridurre l'entità dei numeri. In pratica sarebbe possibile scavalcare questa fase, e dividere le frequenze maggiori direttamente per 66, 88 e 99, pervenendo alla fine alle medesime conclusioni.

La **figura 2** contribuisce a dimostrare con maggiore esattezza in che cosa consistano i rapporti tra le triadi. Consideriamo ad esempio la triade maggiore costituita dalle note DO-MI-SOL

Durante il periodo di tempo in cui per la nota DO vengono prodotti quattro cicli, per la nota MI sono invece prodotti cinque cicli, mentre ne vengono prodotti sei per la nota SOL. Nel caso quindi della triade DO-MI-SOL, quanto sopra accade in un sessantaseiesimo di secondo. La medesima relazione agli effetti del numero delle vibrazioni sussiste per le triadi FA-LA-DO^1 e SOL-SI-RE^1, ad eccezione del fatto che i periodi di tempo considerati risultano più brevi.

Si rammenti che la triade DO-MI-SOL è nota col nome di **triade tonica**, mentre il gruppo SOL-MI-RE^1 è la **triade dominante,** ed il gruppo FA-LA-DO^1 è la **triade sottodominante.**

A partire dalle triadi maggiore e minore è possibile sviluppare un certo numero di accordi differenti, mediante un procedimento che prende il nome di **inversione:** ad esempio, l'accordo DO-MI-SOL può essere considerato come accordo comune. Una prima inversione può essere ottenuta usando l'ottava di DO per costituire l'accordo MI-SOL-DO^1. Una seconda inversione può essere ottenuta usando il MI che si trova un'ottava più in alto per l'accordo SOL-DO^1-MI^1. Altre inversioni analoghe possono essere eseguite nei confronti delle triadi minori.

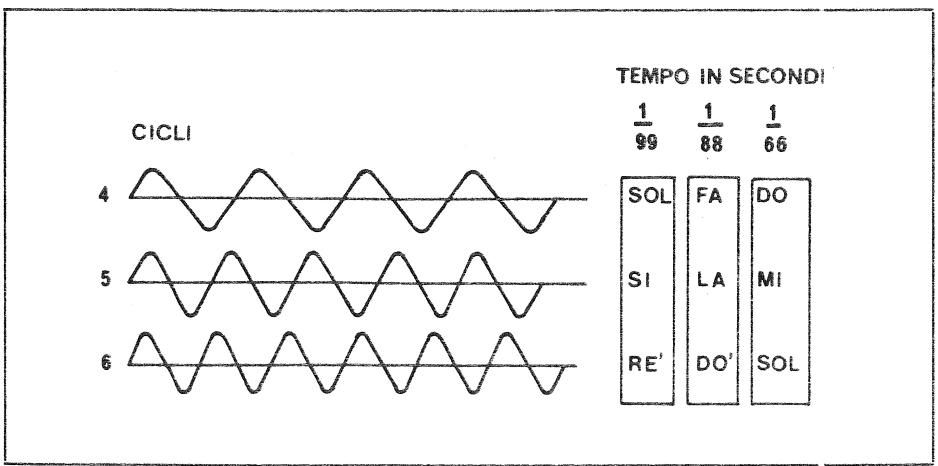

Fig. 2 - Il modo migliore per comprendere i rapporti tra le triadi consiste nel considerarle in funzione di ciò che effettivamente accade durante un determinato intervallo di tempo. In questo caso, mentre per la nota DO vengono prodotti quattro cicli, per il MI ne vengono prodotti cinque, e per il SOL ne vengono prodotti sei.

IL FENOMENO DEI BATTIMENTI

L'effetto che si manifesta quando due o più frequenze vibratorie interferiscono l'una con l'altra, e che si presenta sotto forma di intermittenza o di tremolio del suono risultante, prende il nome di **battimento:** la **figura 3** rappresenta graficamente come questo fenomeno si produce.

Le due sinusoidi discontinue (la tratteggiata e la punteggiata) sono i toni puri primari, di frequenza leggermente diversa, percepiti contemporaneamente.

A partire dal punto di inizio (a sinistra), le fasi di compressione e di rarefazione dell'aria, rappresentate dalle «onde», si sommano in un suono composto (rappresentato in tratto continuo) di ampiezza maggiore di quella di entrambi i suoni primari. Quando però i suddetti suoni primari risultano tra loro sfasati, le relative forme d'onda tendono a neutralizzarsi a vicenda, in modo da determinare la produzione di un breve periodo di ampiezza minima, o di silenzio totale. In ciò consiste appunto il battimento.

Lo spostamento di fase continua quindi a prodursi, per cui si manifesta nuovamente un periodo di rinforzo, seguito da un altro battimento, e così via. Per l'esattezza, verso il centro della rappresentazione grafica di figura 3, si noterà che il suono primario costituito dalla forma d'onda tratteggiata comporta una semionda positiva (rivolta verso l'alto), mentre il secondo suono primario, rappresentato dalla forma d'onda punteggiata, presenta una semionda negativa(rivolta verso il basso). Di conseguenza, in quel preciso istante i due suoni si neutralizzano tra loro, e questo è appunto il motivo per il quale la forma d'onda continua risultante assume in corrispondenza il valore nullo, e passa quindi per la linea orizzontale di riferimento.

Osservando quindi l'andamento della forma d'onda rappresentata in tratto continuo, si noterà che essa presenta l'ampiezza massima a sinistra la quale, col passar del tempo, si riduce gradatamente fino ad assumere un valore nullo, per poi tornare ad aumentare lentamente fino all'ampiezza massima.

La successione ritmica di queste variazioni di ampiezza dà luogo all'effetto di tremolio o di intermittenza col quale si manifesta appunto il fenomeno del battimento.

Il numero dei battimenti che si verificano in un minuto secondo equivale alla differenza tra le frequenze dei due suoni primari. Ad esempio, facendo «battere» tra loro due frequenze di valore pari a 256 e 254 Hz, il battimento risultante presenta la frequenza di:

$$256 - 254 = 2 \text{ Hz}$$

Di conseguenza, il suono risultante presenterà variazioni di ampiezza in numero di due al secondo.

Nel 1873, il Professor H. von Helmholtz pubblicò uno studio matematico classico sulla natura del suono e della musica. Egli aveva infatti osservato che una frequenza di battimento fino al valore massimo di cinque o sei impulsi al secondo produceva un suono gradevole, ma, con l'aumentare della frequenza di battimento oltre tali valori, l'effetto diventava progressivamente meno piacevole all'udito.

Quando la frequenza di battimento diventa talmente rapida che non è più possibile distinguere ogni battimento individuale (oltre venti al secondo), i soli complessi che recano tali modulazioni denotano una dissonanza normalmente definita col termine di «asprezza».

A mano a mano che la frequenza di battimento viene ulteriormente aumentata, questo fenomeno tende a scomparire, fino a risultare assente quando la frequenza di battimento equivale ad una terza minore. La caratteristica di asprezza del suono ricompare però soltanto quando la frequenza di battimento è prossima all'ottava, dopo di che scompare nuovamente quando l'intervallo di ottava risulta esatto.

Come ogni musicista sa, le note con intervallo di ottava devono essere prodotte con la massima precisione, poiché — in caso contrario — si manifesta inevitabilmente un fenomeno di dissonanza.

L'effetto di battimento è la causa fondamentale della dissonanza musicale. Occorre però notare che i suddetti battimenti vengono spesso usati anche per ottenere effetti desiderati. Ad esempio, il fenomeno viene spesso sfruttato per produrre la cosiddetta **voce celeste** di un organo; si tratta di un leggero tono tremolante prodotto con un arresto labiale ben determinato.

Prima dell'avvento degli strumenti elettronici musicali, gli accordatori dei pianoforti dovevano affrontare serie difficoltà a causa del fenomeno del battimento, durante la messa a punto delle corde di un pianoforte.

Buona parte della «qualità» musicale ottenuta quando diversi strumenti vengono fatti suonare contemporaneamente può del pari essere attribuita ai battimenti. Ad esempio, sarebbe molto semplice amplificare il suono di un violino, in modo da renderlo uguale a quello prodotto da dieci violini. Ciò nonostante questo risultato non viene mai ottenuto: per quale motivo?

Dieci violini non possono essere accordati fino alla perfezione assoluta uno rispetto all'altro, per cui l'inevitabile presenza di lievi differenze nell'accordatura determina la produzione di battimenti che producono una qualità tonale che ci si può aspettare soltanto con l'ascolto appunto di dieci violini che suonano contemporaneamente. In altre parole, un unico violino non può assolutamente essere in grado di provocare dei battimenti con i suoni da esso stesso prodotti, senza ricorrere ad un particolare sistema di elaborazione elettronica del segnale.

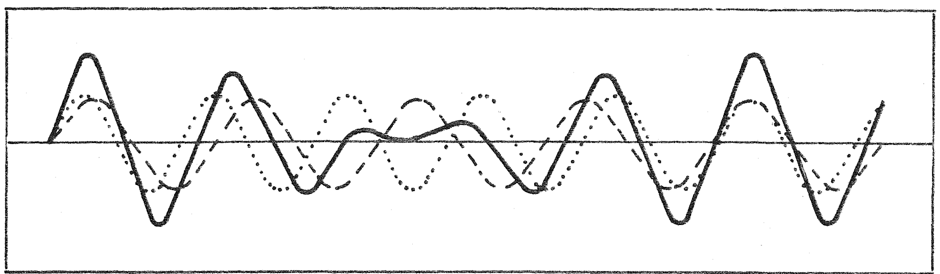

Fig. 3 - Rappresentazione grafica di come viene formato un battimento: la fase relativa tra i due toni originali è di fondamentale importanza, in quanto le rispettive sensazioni acustiche tendono alternativamente a rinforzarsi o a neutralizzarsi a vicenda.

LE ARMONICHE

Ci siamo finora riferiti esclusivamente ai toni puri, ed alle possibili combinazioni tra toni di questo genere. Tuttavia, occorre precisare che le note musicali, così come vengono prodotte dagli strumenti o direttamente dalla voce umana, non sono pure sotto il punto di vista vibratorio.

Esse sono infatti costituite da una «miscela» molto complessa di frequenze vibratorie tra loro correlate da determinate leggi.

Ad esempio, un LA strumentale non

RELAZIONI DI FREQUENZA PER DISSONANZA E CONSONANZA				
Nota	Bassa	Alta		
		Ottava	5a	7a
Fondamentale	262	524	392	494
Prima armonica	524	1047	785	988
Seconda armonica	785	1570	1178	1482
Terza armonica	1047	2094	1570	1976
Quarta armonica	1309	2617	1963	2470
Quinta armonica	1570			
Sesta armonica	1832			
Settima armonica	2094			

Tabella 9 - *Relazioni di frequenza per dissonanza e consonanza tra il DO centrale e le sue varie armoniche. Le righe inferiori indicano le frequenze che presentano controparti esatte.*

può presentare la frequenza pura ed esatta di 261,7 Hz; la nota infatti corrisponde a quella frequenza, con l'aggiunta di altre frequenze che prendono appunto il nome di armoniche.

Come risulta evidente nella **Tabella 9,** le diverse armoniche relative ad una frequenza fondamentale possono essere facilmente calcolate moltiplicando il valore di quest'ultima per 2, 3, 4, e così via.

Le componenti che costituiscono la struttura di un suono complesso vengono definite **toni parziali,** oppure semplicemente **parziali.** La **fondamentale** è la parziale col valore di frequenza più basso; le frequenze progressivamente più elevate prendono invece il nome di **parziali superiori,** o di **armoniche.**

Quando le frequenze delle armoniche sono multipli esatti della fondamentale, il nome di armoniche trova la sua accezione più esatta e corrispondente. Quando invece non si tratta di multipli esatti, il termine corrispondente è quello di **parziali in armoniche.**

LA DISSONANZA

Un'ottava non è altro che un intervallo musicale che presenta la consonanza più alta posisbile; in altri termini, un'ottava è un intervallo con la minima dissonanza.

Il motivo di ciò è reso evidente nella Tabella 9. Confrontiamo infatti la fondamentale e le frequenze armoniche di una nota-bassa (ad esempio il DO centrale) con quelle riferite alla nota DO^1 dell'ottava superiore: si può osservare che ciascuna frequenza nell'ottava più alta corrisponde esattamente ad un'armonica della nota più bassa. Per l'esattezza, la quarta armonica di ottava corrisponde alla nona armonica della nota più bassa.

Se si accetta il fatto che la nota più bassa, DO, non presenta alcuna dissonanza se viene prodotta da sola, è facile constatare che l'aggiunta dell'ottava DO^1 non aggiunge alcunché al suono che non sia già presente, e quindi non può produrre alcuna dissonanza.

Che dire tuttavia dell'effetto di battimento tra le stesse armoniche tra loro? La differenza di frequenza di minore entità è data da:

$$524 - 262 = 262$$

Questa frequenza di battimento è troppo elevata per poter produrre una sensazione di asprezza musicale, ossia di dissonanza.

Cosa accade però quando la nota più alta viene ridotta di un semitono, in modo da determinare un intervallo di settima? In queste circostanze, la situazione è molto differente.

Si noti che una delle armoniche della settima corrisponde ad una armonica della nota bassa. Oltre a ciò, la differenza tra determinate armoniche risulta in tal caso più esigua.

Ad esempio, la frequenza di battimento tra la settima fondamentale (494 Hz) e la prima armonica della nota bassa (524) è pari a 30. Questa frequenza di battimento si trova nella gamma che può con ogni probabilità dare adito ad un fenomeno di dissonanza. I fatti confermano la teoria; la settima viene infatti universalmente riconosciuta come intervallo assai dissonante.

Ed ora vediamo cosa accade nei confronti della quinta: si noti che la prima e la terza armonica della quinta corrispondono alla seconda ed alla quinta ormonica della nota bassa. Questa correlazione porta direttamente alla consonanza, ossia alla mancanza di dissonanza, caratteristica intimamente associata con le quinte musicali.

LA SOLA SUPERFICIE

La matematica della musica considerata in sé stessa — come pure la matematica musicale considerata sot-

CONSONANZA E DISSONANZA IN FUNZIONE DELLE FREQUENZE DI BATTIMENTO				
Intervallo di tono	Note	Frequenze	Freq. di Batt.	Qualità del suono
Quinta	SOL_2-DO_2	98,0 - 65,4	32,6	Consonante
3a Maggiore	MI_3-DO_3	164,8 - 130,8	34,0	Consonante
Tono	RE_4-DO_4	293,7 - 261,7	32,0	Dissonante
Semitono	$DO_5\#$-DO_5	554,6 - 523,4	31,2	Molto dissonante
Semitono	$DO_6\#$-DO_6	1109,2 - 1046,8	62,4	Dissonante
Semitono	$DO_5\#$-DO_5	554,6 - 523,4	31,2	Molto dissonante
Semitono	$DO_4\#$-DO_4	277,3 - 261,7	15,6	Dissonante
Semitono	$DO_3\#$-DO_3	138,6 - 130,8	7,8	Dissonante
Semitono	$DO_2\#$-DO_2	69,3 - 65,4	3,9	Meno dissonante

Tabella 10 - *Consonanza e dissonanza in rapporto alle frequenze di battimento. Si noti che la stessa frequenza di battimento ha ben poca attinenza col fatto che il suono sia consonante o dissonante.*

to un solo aspetto (come ad esempio la dissonanza) — è talmente complessa che, in questa occasione, è possibile soltanto una ridottissima introduzione. Consideriamo però una delle curiosità musicali più rilevanti, con la speranza di eccitare il desiderio di un maggiore approfondimento in coloro che si sentono di affrontare eventualmente uno studio più ampio di questo argomento affascinante.

In riferimento alla **Tabella 10,** si noti che nella metà superiore del grafico tutti gli intervalli tonali selezionati presentano frequenze di battimento pressoché identiche. Ciò nonostante, la quinta e la terza maggiore sono tra loro consonanti, mentre il tono risulta dissonante ed il semitono lo è ancora di più. Per quale motivo?

Nella metà inferiore della tabella si procede al confronto diretto di un certo numero di semitoni identici (DO-DO) appartenenti a diverse ottave. Si osservi che la frequenza di battimento è minima nella gamma dell'ottava più bassa, e che produce quindi la minima quantità di dissonanza.

Ciò non significa che la maggiore dissonanza si verifica nella gamma di ottava con la frequenza di battimento più elevata. Per il semitono compreso tra DO# e DO, almeno, la maggiore dissonanza viene osservata nella gamma di ottava che produca una frequenza di battimento pari a circa 21. Quale è il motivo di ciò? Anche questa è una domanda interessante!

Argomento complicato? NO. Se il Lettore è abbastanza curioso per cercare una risposta esauriente a queste due domande, ciò significa che egli subisce una forte attrattiva dalla matematica musicale, e ciò non in quanto l'approfondimento dell'argomento gli permetterà di suonare meglio il proprio strumento; probabilmente questa curiosità deriva dal fatto che l'arbitrarietà della musica aggiunge qualcosa di «piccante» al gioco della matematica musicale.

Ciò non appena si è avuta la possibilità di constatare che due più due fa quattro, ci si accorge immediatamente dopo che in realtà il risultato corrisponde a 3,99 oppure a 4,01, e — naturalmente — si desidera sapere il motivo di ciò. Non resta quindi che seguire il sentiero tracciato, ed addentrarsi in ulteriori ragionamenti che permetteranno presto o tardi di chiarire anche i misteri più complessi.